المـــــــوضـــوع الاول

التمرين الأول(04):

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;0;1)$،$B(2;-1;1)$ و $C(0;1;1)$

1. تحقق ان النقط A، B و C لاتعين مستويا وحيدا
2. (P_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $mx-y+(2-m)z+m+4=0$ ، (m عدد حقيقي)

ا) بين ان (P_m) مستوي من اجل كل عدد حقيقي m

ب) بين ان جميع المستويات (P_m) تتقاطع في نفس المستقيم(Δ) الذي يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له

3. ا) احسب احداثيات النقطة H المعرفة بـ $2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+e.\overrightarrow{HC}=\vec{0}$: ($e$ اساس اللوغارتم النيبيري)

ب) احسب المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ)

4. ا) اوجد (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e.\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{5}.(1+e)$

ب) اوجد المستويات (P_m) التي تمس المجموعة (S)

التمرين الثاني(05):

1. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول : (I) ..... $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$
   - اكتب الحلول على الشكل المثلثي
2. المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، لتكن النقط ،و التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$، $z_C=\overline{z_B}$ وليكن العدد المركب L حيث : $L=\frac{(1-i)z_B}{z_C}$

ا) اكتب العدد L على الشكل الاسي ثم احسب L^{2016}

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد L^n تخيلي صرف

3. ا) بين انه يوجد دوران r مركزه B ويحول A الى C ، يطلب تعيين زاويته .

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته

4. ا) عين (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}$ حقيقي موجب

ب) عين (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $iz=-1+i\sqrt{3}+2ie^{i\theta}$ عندما θ يمسح $\mathbb{R}$

التمرين الثالث(04):

1. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-x\ln x$. ادرس تغيرات الدالة f
2. (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\frac{e^n}{n^n}$

احسب الحدود : u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيرها ونهايتها

3. (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \ln(u_n)$

ا) اثبت ان : $v_n = n - n\ln(n)$

ب) باستعمال الدالة f ، ادرس اتجاه تغير (v_n) ثم استنتج ان (u_n) متناقصة

ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $0 < u_n \leq e$

د) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة وعين نهايتها .

التمرين الرابع(07):

الجزء 1 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^{x})$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث الوحدة 2cm على محور الفواصل و5cm على محور التراتيب

1. احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

2. ا) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x: $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1 + e^{-x})$

ب) احسب نهاية f عند $+\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

3. نعتبر على المجال $]-1; +\infty[$ الدالة g المعرفة بـ : $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1 + t)$

ا) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0; +\infty[$

ب) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج اشارة $g(t)$ من اجل t موجب تماما

4. ا) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$

ب) استنتج ان f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها

ج) انشئ (C_f)

الجزء 2 :

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1. تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي t : $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$

2. باستعمال التكامل بالتجزئة بين ان : $F(x) = -\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$

3. استنتج مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = 0$، $x = \ln 4$، $y = 0$

التنقيط	التصحيـــح المفصل	التصحيـــح المفصل	التنقيط

التمرين 01:

1. التحقق ان النقط A،B وC لاتعين مستويا وحيدا :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

بما ان : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$ فان الشعاعين $\overrightarrow{AB}$،$\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا **0.5**

وبالتالي النقط A،B وC على استقامة واحدة ومنه النقط A،B وC تعين ملا نهاية من المستويات وهي حزمة المستويات المتقاطعة وفق المستقيم المار بالنقط الثلاث

2. $P(m)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق :

$mx-y+(2-m)z+m+4=0$ ، m عدد حقيقي

ا) نبين ان $P(m)$ مستوي من اجل كل عدد حقيقي m : **0.5**

لدينا من اجل كل m من $\mathbb{R}$ الثلاثية $(m;-1;2-m)\neq(0;0;0)$ ومنه $P(m)$ مستوي من اجل كل عدد حقيقي m

ب) نبين ان جميع المستويات $P(m)$ تتقاطع في نفس المستقيم (Δ) الذي يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له : **0.75**

$mx-y+(2-m)z+m+4=0$ يكافئ

$(-y+2z+4)+m(x-z+1)=0$

يكافئ $(-y+2z+4)=0$ و $(x-z+1)=0$

منه (Δ) معرف بالجملة: $\begin{cases}x-z+1=0\\-y+2z+4=0\end{cases}$ اي ان

$\begin{cases}x=-1+z\\y=4+2z\end{cases}$ بوضع $z=t$ ، t عدد حقيقي

ومنه التمثيل الوسيطي لـ(Δ) هو: $\begin{cases}x=-1+t\\y=4+2t\\z=t\end{cases}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

3. ا) حساب احداثيات النقطة H حيث :

$2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+e\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

بما ان : $2-1+e\neq0$ فان النقطة H موجودة ووحيدة هي مرجح الجملة $\{(A;2);(B;-1);(C;e)\}$ **0.5**

$\begin{cases}x_H=\frac{2x_A-x_B+ex_C}{2-1+e}=0\\y_H=\frac{2y_A-y_B+ey_C}{2-1+e}=1\\z_H=\frac{2z_A-z_B+ez_C}{2-1+e}=1\end{cases}$ ومنه $H=C(0;1;1)$

ب) المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ): لتكن النقطة H' المسقط العمودي (Δ)، $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيهه ، $\overrightarrow{HH'}\begin{pmatrix}x_{H'}\\y_{H'}-1\\z_{H'}-1\end{pmatrix}$ **0.5**

معناه $\begin{cases}\overrightarrow{HH'}.\vec{u}=0\\H'\in(\Delta)\end{cases}$

$\begin{cases}x_{H'}+2y_{H'}+z_{H'}-3=0\\x_{H'}=-1+t\\y_{H'}=4+2t\ ;\ (t\in\mathbb{R})\\z_{H'}=t\end{cases}$: معناه: $t=-\frac{2}{3}$

ومنه $H'\left(-\frac{5}{3};\frac{8}{3};-\frac{2}{3}\right)$

$d(H;(\Delta))=HH'=\frac{5}{\sqrt{3}}$

4. ا) ايجاد (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{5}(1+e)$ **0.5**

معناه $\|(2-1+e)\overrightarrow{MH}\|=\sqrt{5}(1+e)$ معناه :

ومنه $\|\overrightarrow{MH}\|=\sqrt{5}$ ومنه (S) سطح كرة مركزها النقطة H ونصف قطرها $\sqrt{5}$

ب) ايجاد المستويات (P_m) التي تمس المجموعة (S) **0.75**

المستويات (P_m) تمس المجموعة (S) معناه :

$d(H;(P_m))=\sqrt{5}$

$d(H;(P_m))=\frac{|mx_H-y_H+(2-m)z_H+m+4|}{\sqrt{m^2+1+(2-m)^2}}$

$=\frac{5}{\sqrt{2m^2-4m+5}}$

$\frac{5}{\sqrt{2m^2-4m+5}}=\sqrt{5}$ معناه: $\sqrt{5}\sqrt{2m^2-4m+5}=5$

معناه: $m^2-2m=0$ معناه $m=0$ او $m=2$ ومنه :

$(P_0):-y+2z+4=0$ او $(P_2):2x-y+6=0$

التمرين 02:

1) نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ **0.5**

$\Delta=-4$ ومنه $z_1=\sqrt{3}-i$ او $z_2=\sqrt{3}+i$ ومنه

$S=\{\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i\}$

كتابة الحلول على الشكل المثلثي : **0.5**

$z_1=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ ،

$z_2=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

2) كتابة العدد L على الشكل الاسي ثم حساب L^{2016}

لدينا: $z_B=2e^{i\frac{\pi}{6}}$،$z_C=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$،

$1-i=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ ومنه: $L=\frac{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$ **0.5**

$L^{2016}=\sqrt{2}^{2016}e^{i2016\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}^{2016}e^{i168\pi}$ **0.5**

$L^{2016}=\sqrt{2}^{2016}$

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون L^n تخيلي صرف : **0.5**

لدينا: $L=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، $L^n=\sqrt{2}^ne^{i\left(n\frac{\pi}{12}\right)}$

L^n عدد تخيلي صرف معناه $n\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه

$n=12k+6$ ، $k\in\mathbb{N}$

1) ا) نبين انه يوجد دوران r مركزه النقطة B و يحول A الى C 0.5

يطلب تعيين زاويته :

ليكن r تحويل عبارته المركبة من الشكل $z' = az + b$ حيث

a،b عددان مركبان

لدينا معناه $\begin{cases} r(A) = C \\ r(B) = B \end{cases}$ ومنه : $a = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و

$b = z_B(1-a) = 2\sqrt{3}$

ومنه : $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2\sqrt{3}$ بما ان : 0.5

$|a| = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$

فان r هو دوران مركزه B وزاويته $arg(a) = \frac{2\pi}{3}$

ب) استنتاج طبيعة المثلث ABC وحساب مساحته 0.5

لدينا : $AB = BC$ و $arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{2\pi}{3}$ اذن

المثلث ABC متقايس الاضلاع

لتكن $z_{B'}$ لاحقة منتصف $[AC]$، $z_{B'} = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ 0.5

$[BB']$ ارتفاع وعمود ومتوسط ومحور متعلق بـ : $[AC]$ في

المثلث ABC المتقايس الضلعين مساحته $S = \frac{BB' \times AC}{2}$

$BB' = |z_{B'} - z_B| = 1$ ، $AC = |z_C - z_A| = 2\sqrt{3}$

ومنه : $S = \sqrt{3}ua$

1) ا) تعيين (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون

العدد $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}$ حقيقي موجب : لدينا $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i} = \frac{z-z_C}{z-z_A}$ 0.75

$\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}$ حقيقي موجب معناه $arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right) = 2k\pi; k\epsilon\mathbb{Z}$

ومنه (E_1) هي $arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MC}) = 2k\pi; k\epsilon\mathbb{Z}$

المستقيم (AC) باستثناء القطعة $[AC]$

ب) تعيين (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون 0.75

$iz = -1 + i\sqrt{3} + 2ie^{i\theta}$ عندما θ يمسح $\mathbb{R}$

لدينا : $iz = -1 + i\sqrt{3} + 2ie^{i\theta}$ اي $iz = i(i + \sqrt{3} + 2e^{i\theta})$

اي ان : $z = \sqrt{3} + i + 2e^{i\theta}$

ومنه : $z = z_B + 2e^{i\theta}$ ، θ يمسح $\mathbb{R}$ ومنه : (E_2) هي دائرة مركزها

النقطة B ونصف قطرها 2

التمرين 03 :

1) دراسة تغيرات الدالة f 0. 5

$f'(x) = -\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖ 0	↗	0	↘	$-\infty$

0.5

احسب الحدود : u_1، u_2، u_3، u_4 و u_5 ثم ضع تخمينا حول اتجاه 0.5

1) $u_1 = e \approx 2.71$، $u_2 = \frac{e^2}{4} \approx 1.85$

$u_3 = \frac{e^3}{27} \approx 0.74$، $u_4 = \frac{e^4}{256} \approx 0.21$ 0.25

$u_5 = \frac{e^5}{3125} \approx 0.05$، متناقصة ونهايتها 0 0.25

ا) اثبات ان : $v_n = n - n\ln(n)$

1) ا) $v_n = \ln n = n - n\ln n$ 0.5

ب) ادرس اتجاه تغير (v_n) ثم استنتج ان (u_n) متناقصة:

$v_n = f(n)$ والدالة f متناقصة على المجال $[1; +\infty[$ 0.5

وبالتالي (v_n) متناقصة وبما ان $u_n = e^{v_n}$ والدالة الاسية

متزايدة فان اتجاه تغير (u_n) هو اتجاه تغير (v_n) اي (u_n) 0.25

متناقصة

ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$0 < u_n \leq e$

بما ان (u_n) متناقصة فان $u_n \leq u_0 = e$ ولدينا

$e^n > 0$ و $n^n > 0$ وبالتالي $u_n > 0$ اي $0 < u_n \leq e$ 0.5

د) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة وعين نهايتها .

(u_n) متناقصة ومحدودة من الاسفل فهي متقاربة . 0.25

ولدينا $\lim_{n\to+\infty} f(n) = -\infty$ اي

$\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 0$ 0.5

التمرين 04 :

الجزء 1 : $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ ، $D_f = \mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}\right]$ بوضع

$t = e^x$ نجد : $\lim_{t\to0}\left[\frac{\ln(1+t)}{t}\right] = 1$ ومنه 0.25

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته $y = 1$ 0.25

بجوار $-\infty$

3) ا) لدينا من اجل كل عدد حقيقي x :

$f(x) = e^{-x}[\ln e^x + \ln(e^{-x}+1)]$ ومنه

$f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$ 0.5

ب) حساب نهاية f عند $+\infty$ وتفسيرها هندسيا :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ لان

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})\right] = 0$ 0.25

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته $y = 0$

بجوار $+\infty$ 0.25

4) $g(x) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$ ، $D_g =]-1; +\infty[$

ا) دراسة تغيرات الدالة g:

النهايات : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

من اجل كل عدد حقيقي t من $]0; +\infty[$ ولدينا :

$g'(x) = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{-t}{(1+t)^2}$ 0.25

تغيرها ونهايتها

نلاحظ انه من اجل كل عدد حقيقي t من $[0;+\infty[$: $g'(x) < 0$

جدول التغيرات : 0.5

t	0	$+\infty$
g'(t)		−
g(t)	0 ↘	$-\infty$

0.75

من جدول التغيرات نستنتج انه من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما t ان : $g(t) < 0$

1) ا) حساب $f'(x)$:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \frac{e^x}{1+e^x} \times e^{-x}$$ 0.5

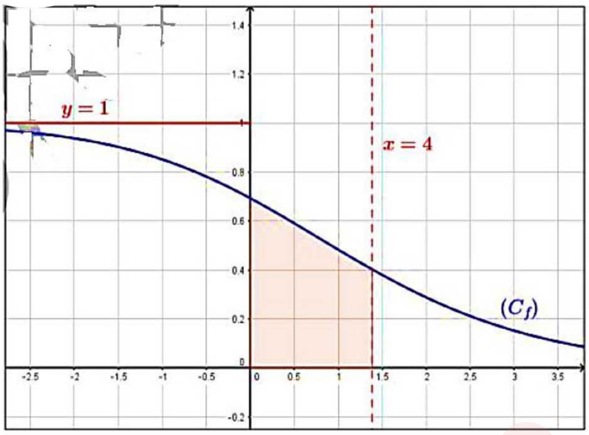
ومنه بعد التبسيط نجد : $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$

ب) من اجل كل عدد حقيقي x نضع $t = e^x$ نجد $\frac{g(t)}{t} < 0$ ومنه نجد $\frac{g(e^x)}{e^x} < 0$ اي $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة على مجموعة تعريفها

جدول التغيرات : 0.5

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)		−
f(x)	1 ↘	0

ج) انشاء (C_f): (انظر في اخر الصفحة) 0.5



الجزء 2: $\int_0^x f(t)dt$

1) لدينا من اجل كل عدد حقيقي t : $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$ 0.5

2) حساب التكامل بالتجزئة :

نضع : $\begin{cases} u(t) = \ln(1+e^t) \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ و $\begin{cases} u'(t) = \frac{e^t}{1+e^t} \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$ ومنه : 0.75

$$F(x) = [\ln(1+e^t) \times (-e^{-t})]_0^x - \int_0^x -e^{-t} \times \frac{e^t}{1+e^t}dt$$

$$F(x) = [\ln(1+e^t) \times (-e^{-t})]_0^x - \int_0^x \frac{1}{1+e^t}dt$$

$$F(x) = [\ln(1+e^t) \times (-e^{-t})]_0^x - \int_0^x \left(1 - \frac{e^t}{1+e^t}\right)dt$$

$$= -f(x) - \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) + 2\ln 2$$

3) حساب المساحة : 0.75

$$\int_0^{\ln 4} f(x)dx = \left[-f(x) - \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) + 2\ln 2\right]_0^{\ln 4}$$

بعد الحساب نجد :

$$\int_0^{\ln 4} f(x)dx = \frac{-25\ln 5}{2} + 10\ln 2\ cm^2$$